Principe

Le principe du filtre Médian est souvent défini dans le cas d'une image discrète, dont l'implantation pratique est directe. A partir des concepts discrets, il est possible d'en donner une version continue, qui sera adapté à l'étude théorique de certaines de ses propriétés.

Considérons une image discrète F caractérisée par un niveau de gris $f(x,y)$. Soit $V(x_0,y_0)$ le voisinage associé au point de coordonnées (x_0,y_0) ; on suppose que ce voisinage comprend N pixels de coordonnées (x_0-u,y_0-v) avec N impair.

Soient $\{f_1,f_2,\ldots,f_i,\ldots,f_{N-1},f_N\}$ les niveaux de gris associés aux N pixels de $V(x_0,y_0)$.

Le filtrage médian procède tout d'abord par un tri des valeurs de niveau de gris du voisinage suivi d'une sélection de l'élément milieu du tri.

Le tri se fait par ordre croissant généralement. Il conduit à former l'ensemble ordonné des valeurs de gris du voisinage de $f(x_0,y_0)$. Les éléments ordonnés étant notés $f_{(i)}$, le tri croissant est caractérisé par:

$$f_1 < f_2 < \ldots < f_{\frac{N+1}{2}} < \ldots < f_{N-1} < f_N$$

L'élément médian du voisinage est $f_{\left(\frac{N+1}{2}\right)}$. Sa propriété est d'être précédé par $\frac{N-1}{2}$ valeurs inférieures et suivi par autant de valeurs supérieures.

Le filtrage consiste à remplacer $f(x_0,y_0)$ par la valeur médiane du voisinage $f_{\left(\frac{N+1}{2}\right)}$.

Propriétés du filtre Médian

- Linéarité du filtre Médian:

  - le filtre respecte la loi multiplication de f par un scalaire a $M[af] = aM[f]$. En effet, la multiplication de l'ensemble des valeurs du voisinage ne modifie pas l'ordonnancement de ces valeurs pour $a > 0$. Pour $a < 0$, l'ordonnancement est renversé, mais le centre de la classification décroissante reste le même.

  - le filtre Médian ne respecte pas l'addition : $M[f+g] \neq M[f]+M[g]$ car le classement d'une somme de valeurs n'est pas égal à la somme des classements dans le cas général.

- Aspects non-linéaires du filtre Médian:

  C'est un filtre croissant , autodual, idempotent lorsque le filtrage conduit à une image totalement ordonnée (cas qui ne peut s'obtenir que par un très grand nombre de passages successifs), qui respecte l'union et l'intersection. Le filtre Médian est considéré comme faiblement non-linéaire par rapport à d'autres modèles.

- Réponse impulsionnelle:

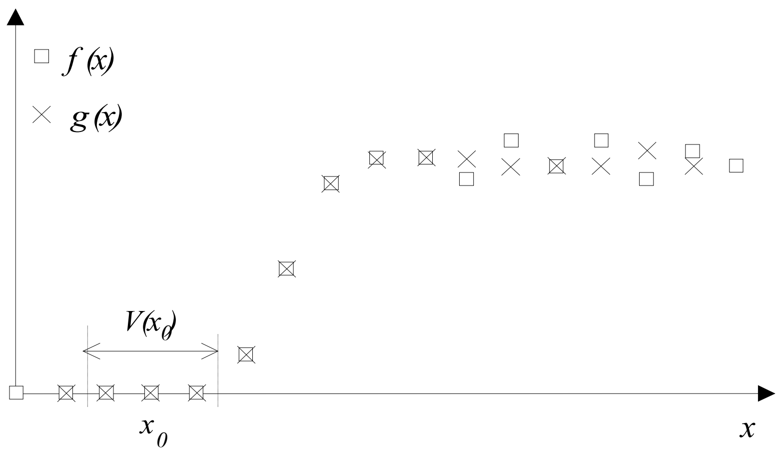
Par définition, la réponse impulsionnelle est obtenue pour une image source ne comprenant qu'un seul point non-nul. Etant donné que la taille d'un médian est d'au moins N=3 pour un filtre symétrique, l'impulsion ne peut faire partie du médian.

La réponse impulsionnelle du médian est donc *nulle*.

De façon générale, toute information du type contraste local (noir sur blanc ou blanc sur noir) de taille inférieure à $\frac{N-1}{2}$ ne peut être médian. Une telle information disparaît donc du résultat. Le choix de la dimension spatiale du filtre médian est essentiellement lié à cette notion.

- Respect des contours

Considérons l'action d'un filtre Médian unidimensionnel avec N = 3 appliqué sur une fonction $f(x)$.

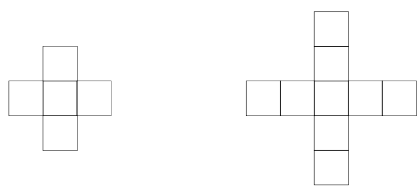


On remarque que le filtre Médian ne produit aucune action sur un contour non bruité: en effet, le contour représente une structure ordonnée autour du point courant x_0, il en résulte que la classification du voisinage est déjà réalisée avec comme élément central de la classe $f(x_0)$. En particulier, le contour parfait type *marche* est préservé. Cette différence fondamentale par rapport aux filtres linéaires permet son emploi dans le domaine de l'*imagerie video*, comme débruiteur par exemple.

- Rejet des valeurs extrêmes

Le filtre Médian a la propriété de rejeter les valeurs extrêmes puisqu'elles se trouvent en bord de classement et non au centre.

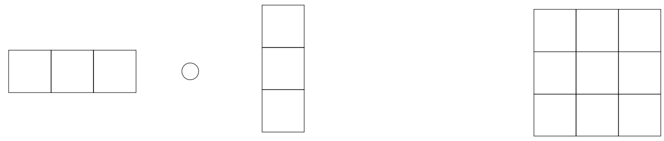
A noter que la valeur médiane est toujours parmi les valeurs *majoritaires* du voisinage. Cet aspect est très important car ce filtre rejette toute *information minoritaire* par rapport à la taille du filtre. Par exemple, pour un filtre (3,3), les informations de taille inférieure à 4 pixels sont éliminées Pour minimiser cet effet de rejet, on utilise les formes de voisinages suivante:



- Loi de composition

  Contrairement aux filtres linéaires, le passage successif de 2 ou plusieurs filtres Médian n'est pas équivalent à Médian unique: $f \circ M_1 \circ M_2 \neq f \circ M$

  Par exemple, le passage d'un filtre horizontal puis d'un filtre vertical ne donne pas le même résultat qu'un 3x3.



≠ M(1,3) M(3,1) M(3,3)

  En effet, le premier schéma est un choix en deux étapes de sélection, alors que le médian (3,3) est un choix direct. Rien ne permet d'affirmer que la valeur retenue dans le voisinage (3,3) fait partie des valeurs retenues lors du passage du (1,3) puisque les ensembles ne sont pas les mêmes dans les deux cas. En particulier, la notion d'information majoritaire n'a pas le même poids pour les deux méthodes.

Exemple

L'application est faite sur une image bruitée par un bruit uniforme. L'exemple montre que le filtre médian respecte les contours, sans introduire de flou sensible.

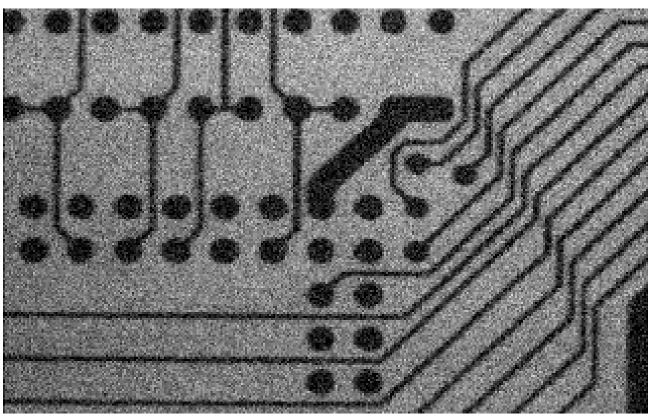
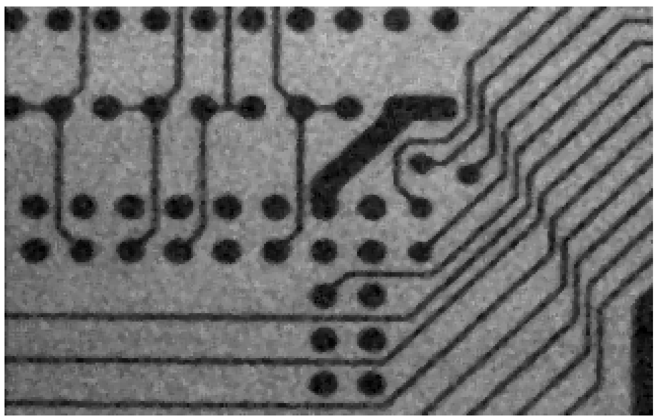


Image bruitée

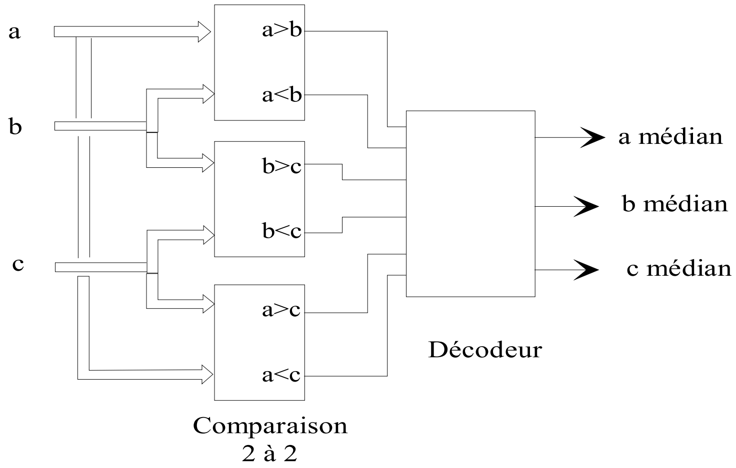


Application d'un filtre médian 3x3

Implantation du Filtre Médian

L'implantation du filtre Médian ou de façon générale toute structure de tri des valeurs du voisinage peut se faire suivant un schéma de calcul parallèle à partir des valeurs données par un reconstructeur de voisinage (voir Chap I).

Pour un voisinage (1,3), le schéma est le suivant:



Le nombre de comparateurs à mettre en place dans une structure parallèle est de C_3^2 soit 3 comparateurs. .

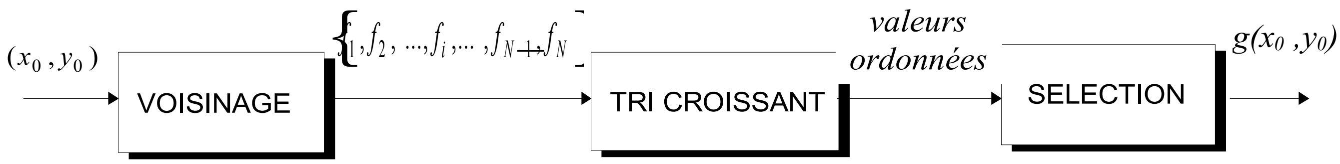
Dans le cas général d'un voisinage comprenant *N* pixels, il faudra $C_N^2 = \frac{N!}{2!(N-2)!}$; pour $N = 9$, on aboutit à 36 comparateurs. La solution cascade (3,1) puis (1,3) prend tout son avantage en terme de complexité.

De telles fonctions sont très facilement implantables dans des structures du type FPGA, en partculier les produit de la famille FLEX de chez ALTERA .

RANK ORDER FILTER

Le Rank Order Filter ou Filtrage par Tri de données est une généralisation du filtrage Médian par choix de la fonction de sélection de l'élément.

- élément médian
- élément minimum ou maximum, ce qui donne des filtres dits *morphologiques*.



D'autres filtres peuvent construits à partir du même schéma de travail en adoptant pour la fonction de sélection une forme du type:

$$g(x_0, y_0) = \sum a_i f_i(i)$$

Le choix des coefficients a_i permet de retrouver des filtres connus ou d'en construire des nouveaux.

- médian : $a_i = 0$ pour $i \neq (N+1)/2$ et $a_i = 1$ pour $i = (N+1)/2$
- milieu : $a_1 = a_N = 0{,}5$
- moyenneur : $a_i = 1/N$

On peut montrer que ces filtres minimisent le critère de distance $\left(\sum_{i=1}^{N} |g - f_i|^g \right)^{1/g}$ avec $g = 1, 2, \infty$ pour respectivement chacun des filtres ci-dessus.