Le mécanisme des opérations ponctuelles est le plus simple en traitement d'images. A partir d'une image source, le résultat est établi *point par point* (fig-1) .

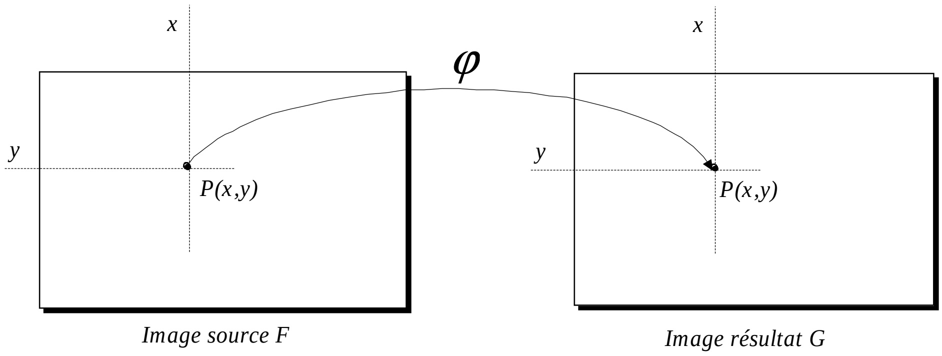

Figure 1 – Mécanisme de l'opération ponctuelle

Soit *f(x,y)* le niveau de gris du point P de l'image source et *g(x,y)* le niveau de gris de l'image résultat. L'opération ponctuelle réalise l'application suivante de $\Re^+ \rightarrow \Re^+$:

$$\boxed{g(x,y) = \phi[f(x,y)]}$$

Les coordonnées du point résultat sont supposée identiques à celle du point source dans cette étude.

L'opération peut se représenter localement pour le point *P(x,y)* par un graphe (fig 2) :

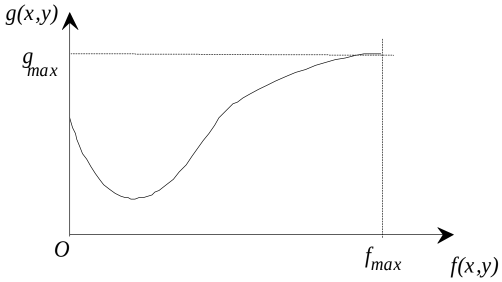

Figure 2 – Graphe d'une opération ponctuelle

Cette opération se définit de la même façon pour les images discrètes en considérant le niveau *i* de l'image source et le niveau *i'* de l'image résultat:

$$\boxed{i'(m,n) = \varphi[i(m,n)]}$$

La représentation est un graphe discret ou une *table* d'entrée *i* (calcul de la sortie par *Look Up Table* ou *LUT*)

Propriétés de φ

Dans le cas général, l'opération ne possède pas de propriété particulière. Elle peut dépendre du point traité et du niveau de gris.

- l'opération φ est *invariante par translation* si elle ne dépend pas des cordonnées du point traité. Dans ce cas, φ est une application de *f* dans *g* notée :

$$g = \varphi(f)$$

- l'opération φ peut être *bijective*. A tout valeur de *f* correspond une et une seule valeur de *g*; à toute valeur de *g* correspond au moins une valeur de *f* . Cette propriété est rencontrée sur la plus grande partie des opérations ponctuelles.

- l'opération φ peut être *linéaire* par rapport aux niveaux de gris; la propriété s'exprime par les relations usuelles suivantes:

$$\text{pour} \quad f = f_1 + f_2 \qquad g = \varphi(f) = \varphi(f_1) + \varphi(f_2)$$

$$\text{pour} \quad f = a\ f_1 \qquad g = \varphi(f) = a\ \varphi(f_1)$$

La seule écriture possible d'une opération ponctuelle linéaire est :

$$g(x,y) = a(x,y)\ .\ f(x,y) \quad \text{avec } a \text{ paramètre scalaire}$$

La restriction au cas linéaire n'offre aucune perspective de développement de fonction utiles dans l'analyse d'une image.

Exemples d'opérations ponctuelles

- lois de base

Les mois de base ont pour graphe une droite ou un segment de droite. Ces lois ont généralement pour objet de faciliter l'observation d'une image sur un écran.

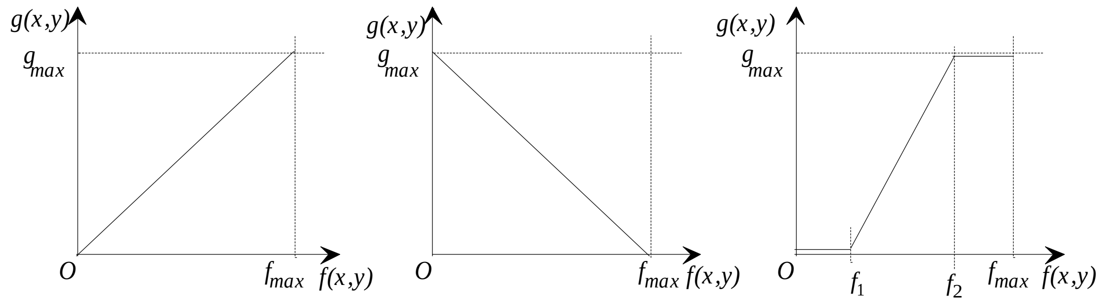

Figure 3 – lois de base (a) loi neutre (b) inverse vidéo (c) compression/expansion des niveaux de gris

La loi de compression/expansion des niveaux de gris a pour effet de réduire la dynamique d'affichage dans les zones $[0\ ,\ f_1]$ et $[f_2\ ,\ f_{\max}]$ (gain <1) et de l'augmenter dans la zone $[f_1\ ,\ f_2]$ (gain > 1) .Un tel mode d'affichage permet de disposer de toute l'échelle des gris pour visualiser la zone $[f_1\ ,\ f_2]$, ce qui met en évidence les nuances de gris de cet intervalle.

- Correction gain/offset d'un capteur

C'est un cas fréquent d'application d'une opération ponctuelle; elle est utilisée dans les caméras de qualité (linéaire ou matricielle). Elle a pour objet de corriger le niveau de noir du signal (offset) et la valeur du blanc (offset).

La loi est du type affine : $g(x,y) = a(x,y)\ .\ f(x,y) + b(x,y)$

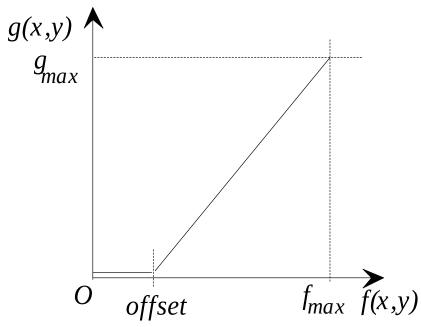

Figure 4 – Correction offset et gain d'un capteur

Pour les applications performantes, la loi est appliquée pixel par pixel. Les coefficients sont déterminés par une prise de vue dans le noir complet (détermination des coefficients d'offset *a(x,y)*), correction du niveau de noir puis prise de vue du blanc de référence (diffuseur blanc sur objectif) et détermination des coefficients de gain *b(x,y)* . Le stockage de ces coefficients demande des structures de dimensions égales à celles du capteur utilisé.

- Correction du vignettage

Le vignettage est un défaut optique des objectifs de prise de vue. Il se traduit par une atténuation des rayons obliques par effet de réflexion partielle sur les lentilles. La conséquence est un assombrissement de l'image sur les bords; les objectifs courants ont un vignettage de 0.7. L'étalonnage de cette correction peut se faire par prise de vue d'un blanc de référence uniformément éclairé.

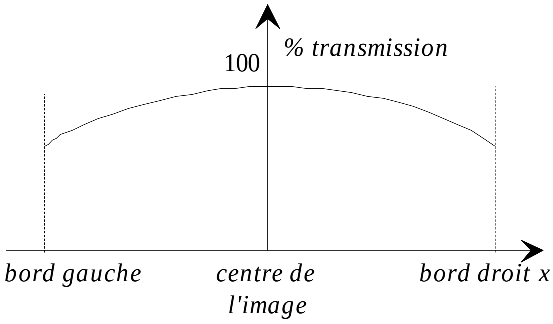

Figure 5 – Courbe du vignettage d'un objectif standard

La loi de correction est l'inverse du coefficient de transmission de l'objectif; elle a pour expression : . $g(x,y) = \alpha(x,y).\, f(x,y)$ avec $\alpha(x,y)$ coefficient correcteur

Il est évident que cette correction n'est pas invariante par translation.

Egalisation d'histogramme

L'égalisation d'histogramme est une opération ponctuelle basée sur une analyse de l'histogramme des niveaux de gris de l'image source; elle corrige automatiquement la répartiondes niveaux de gris pour utiliser la totalité de la dynamique des niveaux de gris.

- Histogramme des niveaux de gris

L'histogramme des niveaux de gris est obtenu par dénombrement des niveaux de gris contenu dans une image et tracé du graphe discret de ces valeurs en fonction du niveau de gris. Le graphe est une suite de raies; lorsque tous les niveaux de gris sont représentés (absence de "trous" dans la représentation), le graphe suit la forme du graphe de *densité de probabilité* du niveau de gris de l'image avant sa digitalisation.

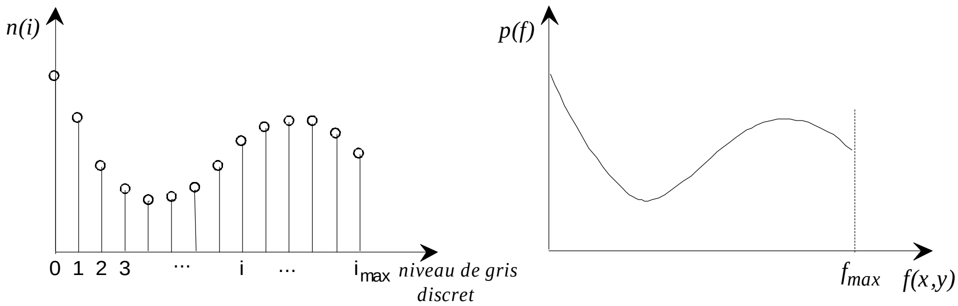

Figure 6 – Histogramme et densité de probabilité

L'histogramme cumulé représente la probabilité *P(f)* du niveau f ; il est donné par :

$$N(i) = \sum_{0}^{i} n(i) \text{ avec } N(i_{\max}) = N_T \text{ nombre total de pixel de l'image}$$

La probabilité d'avoir un niveau de gris inférieur ou égal à *i* est $N(i)/N_T$ (fonction de répartition).

- Observation de l'histogramme

L'histogramme est une vue statistique et globale de l'image. La présence d'un niveau de gris dans l'histogramme, caractérisée par une raie, n'indique pas la position spatiale des pixels ayant ce niveau de gris. Il renseigne cependant sur la dynamique des niveaux de gris utilisés dans l'image.

Les exemples suivants montrent des formes usuelles d'histogramme :

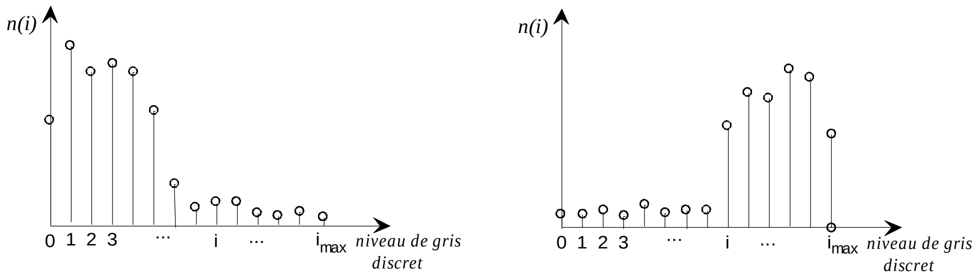

Figure 7 – Histogramme (a) image sombre (b) image claire

- Egalisation de l'histogramme

L'objectif de l'égalisation d'histogramme est de ramener l'histogramme des niveaux de gris à un histogramme plat qui traduit une équiprobabilité des différents niveaux de gris .

La méthode s'appuie sur une transposition discrète du théorème relatif à l'évolution de la densité de probabilité lors d'une opération ponctuelle.

Soit $g = \varphi(f)$ l'opération ponctuelle appliquée à l'image de niveau f dont la répartition est donnée par sa densité de probabilité $p(f)$. La densité de probabilité du niveau de gris de l'image g pour la valeur g_1 sera donnée par :

$$p(g)|_{g_1} = p(f)\,\frac{df}{dg}|_{f_1 = \varphi^{-1}(g_1)}$$

La démonstration est simple:

- si φ est une fonction monotone croissante alors $P(g)|_{g_1} = P(f)|_{f_1}$

- $dg = \frac{dg}{df}\,df$ soit $dg = \varphi'\,df$ avec φ' pente de l'opération ponctuelle en f_1

d'où $p(g)|_{g_1} = \frac{dP(g)}{dg}|_{g_1} = \frac{dP(f)}{dg}|_{f_1} = \frac{dP(f)}{df}\,\frac{df}{dg} = p(f)\,\frac{df}{dg}$

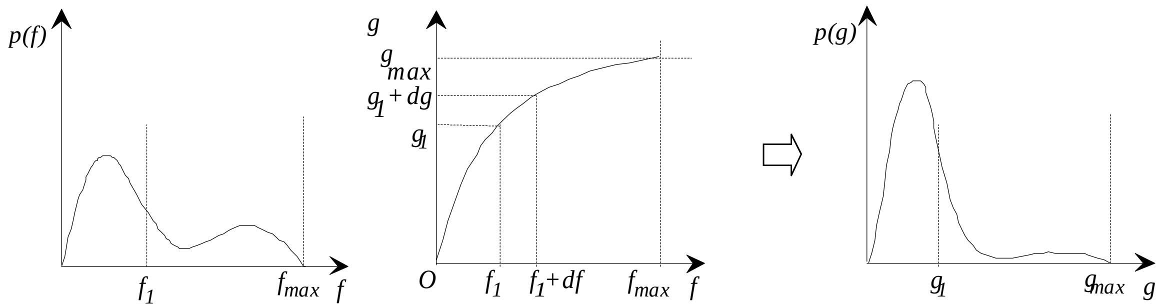

Figure 8 – Modification de la densité de probabilité des niveaux de gris
au cours d'une opération ponctuelle

Pour obtenir une densité de probabilité constante pour g , il suffit de choisir:

$$\varphi' = \frac{dg}{df} = p(f) \quad \text{d'où} \quad \varphi = \int_0^f p(f)\,df = P(f)$$

La densité de probabilité de l'image résultante est alors: $p(g) = 1$

L'application aux images discrètes se fait en utilisant l'histogramme cumulé, notion équivalente à la probabilité.

- $N(i') = N(i)$ avec i' niveau de gris discret de l'image modifiée
- $n(i')/N_{TOT} = (n(i)/N_{TOT})\,\varphi'$ sous réserve de donner un sens à φ' dans un espace discret.

On choisit donc : $\varphi(i) = \sum_{0}^{i} n(i)$

En introduisant le facteur d'échelle des niveaux $i_{\max}$, la loi d'égalisation discrète est donnée par:

$$i' = \frac{i_{\max}}{N_{TOT}} \sum_{0}^{i} n(i)$$

Les résultats pratiques sont montrés ci-dessous sur l'image *Lenna* volontairement éclaircie par ajout d'une constante de décalage. On remarque que l'histogramme résultant n'est pas égal pour tous les niveaux de gris et que les raies ne sont pas équidistantes; cependant l'histogramme cumulé est une rampe, ce qui traduit une densité de probabilité constante.

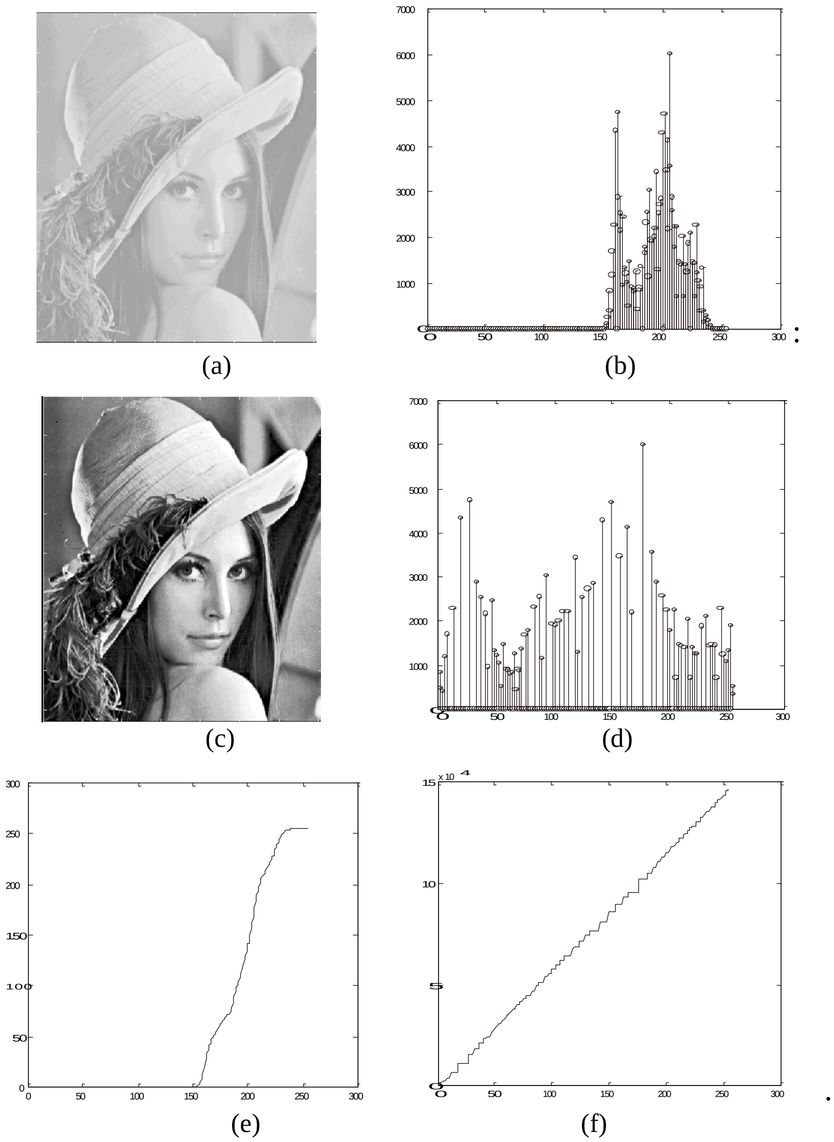

Figure 9 – Egalisation de l'histogramme de Lenna (a) original (b) histogramme de l'original
(c) image modifiée (d) histogramme de l'image modifiée (e) loi de correction (f) cumul de l'histogramme d

Programme Matlab d'égalisation d'histogramme

```
clear
[Image1,map1] = imread('lenna.gif');
Im1_size=size(Image1,1)*size(Image1,2);

% Recadrage des niveaux de gris de l'
image

Image2=ind2gray(Image1,map1);
Image2=(128+Image1/2);

imshow(Image2)
%colormap(gray);

% Calcul de l'histogramme de l'original
niv_gris1=[1:255]';

histo1=zeros(size(niv_gris1));
for i=1:size(Image2,1)
    for j=1:size(Image2,2)
        index = round(Image2(i,j)-.5);
        if (index==0)
            index=1;
        end
        histo1(index)=histo1(index) + 1;
    end
end

figure
stem(niv_gris1,histo1,'w')

% Histogramme cumulé

cumul=zeros(size(niv_gris1));
cumul(1)=histo1(1);
for i=1:1:size(niv_gris1,1)-1
    cumul(i+1)=cumul(i) + histo1(i+1);
end

% Nouveaux niveaux de gris

niv_gris2=niv_gris1;
for i=1:1:size(niv_gris1,1)
    niv_gris2(i)=round(255*cumul(i)/Im1_size);
end

figure
plot(niv_gris1,niv_gris2,'w')

% Calcul indirect du nouvel histogramme

histo2=zeros(size(niv_gris2));
for i=1:size(niv_gris2,1)-1
    index=niv_gris2(i);
    if (index>=255)
        index=255;
    end
    if (index<=1)
        index=1;
    end
    histo2(index)=histo2(index) + histo1(i);
end
figure
stem(niv_gris1,histo2,'w')

% Verification du cumul

somme = 0;
for i=1:size(histo2)
    somme=somme + histo2(i);
end
somme=somme/Im1_size;

% Modification des niveaux de gris

for i=1:size(Image2,1)
    for j=1:size(Image2,2)
        index = round(Image2(i,j)-.5);
        if (index==0)
            index=1;
        end
        if (index>=255)
            index=255;
        end
        Image2(i,j) = niv_gris2(index);
    end
end
figure
colormap(gray)
imshow(Image2)

%  Calcul du nouvel histogramme cumulé

cumul=zeros(size(niv_gris2));
cumul(1)=histo1(1);
for i=1:1:size(niv_gris2,1)-1
    cumul(i+1)=cumul(i) + histo2(i+1);
end
figure
plot(niv_gris1,cumul)

% Pour Matlab4, remplacer imread par
% la fonction gifread
```